

Le calcul fractionnaire comme outil de modélisation



Salvador Jiménez

Pi Day, 3/14/2025

Contents

1	Introduction	3
1.1	Modélisation (mathématique)	3
1.2	Un cas bien réussi : les systèmes dynamiques	4
1.2.1	Formulation (temps continu, nombre fini de variables)	5
1.2.2	Étude des points critiques pour un système autonome	7
2	Outils mathématiques	10
2.1	Motivation d’une “formulation fractionnaire”	10
2.2	Quelques détails historiques	10

2.3	Fonction Gamma de Euler et fonctions de Mittag-Leffler	11
2.4	Intégrales fractionnaires	16
2.5	Dérivée de Riemann-Liouville	18
2.6	Dérivée de Caputo	20
2.7	Dérivée de Grünwald-Letnikov	22
3	FODE models	25
3.1	Some tools	25
3.2	Drawbaks	27
3.3	An example: a visco-elastic linear model	27
3.4	An example: a visco-elastic nonlinear model	32
	Some references	37

1 Introduction

1.1 Modélisation (mathématique)

Nous partons d'un modèle physique, chimique, biologique, (financier), ... et essayons de le représenter sous forme d'expressions (équations) mathématiques.

Exemples

■ Désintégration d'un élément radioactif.

- Modèle physique : (assez résumé) Un atome quelconque d'un élément radioactif a autant de chances de se désintégrer à un moment donné qu'un autre de la même espèce, le nombre de désintégrations à un instant donné est proportionnel au nombre N d'atomes de même espèce présents.
- Modèle mathématique : soit $N(t)$ le nombre (ou, plutôt, la fraction relative) d'atomes radioactifs de notre échantillon, nous avons $N'(t) = -\lambda N(t)$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$.
Nous savons résoudre : $N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$.

■ Deuxième loi de Newton

- Modèle physique (énoncé archaïque) : “Les changements qui arrivent dans le mouvement

sont proportionnels à la force motrice ; et se font dans la ligne droite dans laquelle cette force a été imprimée.”

- Modèle mathématique : $\vec{x}'(t) = \vec{v}$, $m\vec{v}' = \vec{F}$. En résumé, $m\vec{a} = \vec{F}$.

Parfois la présentation est trompeuse :

■ (Faux) modèle d'écologie de Leonardo Pisano (*Fibonacci*)

- Modèle écologique : “Quelqu’un a déposé un couple de lapins dans un certain lieu, clos de toutes parts, pour savoir combien de couples seraient issus de cette paire en une année, car il est dans leur nature de générer un autre couple en un seul mois, et qu’ils enfantent dans le second mois après leur naissance.” (et tous restent en vie, sinon...)
- (Vrai) modèle mathématique: obtenir la valeur de N_{12} , sachant que $N_n = N_{n-1} + N_{n-2}$ et que $N_0 = N_1 = 1$.

Le but : construire un modèle (que ce soit physique, etc, puis mathématique) qui représente l'essentiel du système étudié.

Constructions : de bas en haut (bottom-up), à partir de principes premiers (axiomes) ; de haut en bas (top-bottom) à partir d'un modèle connu que l'on essaye d'ajuster.

Limitations et risques : le problème de la vache *sphérique* ou de *l'ensemble vide*, le problème du modèle *trop beau*.

1.2 Un cas bien réussi : les systèmes dynamiques

Ce sont des modèles mathématiques que l'on retrouve dans de nombreuses formulations pour représenter l'évolution d'un système avec le temps. Ce temps peut correspondre à une variable réelle (temps continu) ou naturelle (temps discret). De nombreux systèmes sont modélisés de manière satisfaisante, par exemple en physique, la mécanique (classique ou quantique), la gravitation, la thermodynamique, ...

1.2.1 Formulation (temps continu, nombre fini de variables)

$$\text{Nous avons vu : } \begin{cases} \vec{x}' = v, \\ \vec{v}' = (1/m)\vec{F}, \end{cases} \quad \text{en général } t \in \mathbb{R}, \vec{x}, \vec{f} \in \mathbb{R}^n, \vec{x}' = \vec{f}(\vec{x}, t) \Leftrightarrow \begin{cases} x'_1 = f_1(\vec{x}, t), \\ x'_2 = f_2(\vec{x}, t), \\ \vdots \\ x'_n = f_n(\vec{x}, t). \end{cases}$$

- Les composantes de \vec{x} correspondent aux différentes variables nécessaires à caractériser l'état du système de façon unique. Par exemple pour un mobile classique, les trois composantes de la position, les trois composantes de la vitesse.
- On distingue entre les systèmes *non-autonomes* et *autonomes* selon si \vec{f} dépend ou non explicitement du temps.

- Tout système non-autonome peut se transformer en un autonome, en rajoutant une variable, x_{n+1} qui aurait pour dérivée 1 pour tout temps. Mais (ça ne conduit à rien, ou presque, et) en pratique l'analyse de ces systèmes se fait avec des outils différents.
- En principe on voudra résoudre les équations à partir d'une donnée initiale: $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ (problème de *Cauchy*) dans l'espace de configuration $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, et obtenir la *trajectoire* dans l'espace des phases \mathbb{R}^n . En général on n'y arrive pas, mais ...
- Au moins on peut assurer l'existence et l'unicité de la solution à partir de la donnée initiale, dans un certain intervalle de temps, si le problème de Cauchy est *bien posé* : $f_i(\vec{x}, t)$ sont continues en t et "lipschitziennes" en \vec{x} . (Dans tout intervalle borné la distance entre deux valeurs de la fonction est majorée par la distance entre les valeurs de la variable fois une constante : l'existence de la dérivée n'est pas assurée mais tous les taux d'accroissements sont bornés par la constante $\forall s_1, s_2, |h(s_1) - h(s_2)| \leq k|s_1 - s_2|$.)
- Pour les systèmes autonomes l'analyse se fait principalement autour des solutions constantes (*points critiques*) qui n'existent pas pour les systèmes non-autonomes.

1.2.2 Étude des points critiques pour un système autonome

■ Pour chaque point critique on cherche à établir sa stabilité : quel est le comportement au voisinage de ce point ?

- Développements limités de chaque f_i centrés sur le point critique \vec{x}_0 . Sous forme générale :

$$\vec{x}'(t) = \vec{f}(\vec{x}_0) + M(\vec{x} - \vec{x}_0) + o(1) = M(\vec{x} - \vec{x}_0) + o(1),$$

M une matrice $n \times n$ constante.

- On résout le système linéaire associé : $\vec{y}' = M\vec{y}$. $[\vec{y}(t) = e^{Mt}\vec{y}_0 \text{ !!}]$
- Importance des *vecteurs propres*.
- Importance des *valeurs propres*.

Parenthèse (

Définition : étant donné une matrice carrée M on appelle vecteur propre \vec{v} associé à la valeur (scalaire) propre λ à tout vecteur non-nul (pourquoi non-nul ?) tel que $M\vec{v} = \lambda\vec{v}$.

- Il n'existe pas de vecteur propre sans valeur propre, et vice-versa.
- Les directions correspondantes aux vecteurs propres sont vraiment spéciales.
- Tout vecteur propre nous donne une solution particulière de l'équation différentielle

$$\vec{y}(t) = a(t)\vec{v} \implies \vec{y}'(t) = a'(t)\vec{v}, \quad M\vec{y} = \lambda a(t)\vec{v}$$

et l'équation $\vec{y}' = M\vec{y}$ n'est plus *vectorielle* mais *scalaire* : $a'(t) = \lambda a(t)$.

- Mais ... λ peut être “compliqué” : les valeurs propres sont les racines d'un certain polynôme associé à la matrice. En général $\lambda \in \mathbb{C}$ (!!!)

Pour ne pas ouvrir une deuxième parenthèse disons que la forme générale de $a(t)$ est

$$e^{\alpha t}[c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)], \quad c_1, c_2 \text{ constantes.}$$

On appelle α la partie réelle de λ et β sa partie imaginaire :

- si $\alpha > 0$, $a(t)$ n'est pas borné quand t tends vers $+\infty$,
- si $\alpha < 0$, $a(t)$ tends vers zéro quand t tends vers $+\infty$,
- si $\alpha = 0$, (et $\beta \neq 0$) $a(t)$ est une fonction périodique de t .

Parenthèse)

En conclusion, pour un point critique donné

- Si toutes les valeurs propres ont une partie réelle strictement négative, au voisinage du point critique les solutions vont tendre vers celui-ci avec le temps. [point *asymptotiquement* stable]
- Si il a au moins une valeur propre à partie réelle strictement positive, au voisinage du point critique des solutions vont s'éloigner. [point instable]
- Dans toute autre situation on ne peut pas conclure sur la stabilité du point à partir de l'approximation linéaire et une étude plus approfondie est nécessaire.

Tout cela n'ait des travaux de Poincaré^a et continue de nos jours avec multitude de questions ouvertes, ne serait-ce qu'en relation avec la théorie du chaos (l'effet *papillon*).

^aMémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (I), H. Poincaré, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* Volume **7**, pages 375–422, (1881) ; Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (II), H. Poincaré, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* Volume **8**, pages 251–296(1882) ; Sur les courbes définies par les équations différentielles (III), H. Poincaré, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* Volume **1**, pages 167–244 (1885).

2 Outils mathématiques

2.1 Motivation d’une “formulation fractionnaire”

Les systèmes complexes (verre, cristaux liquides, polymères, protéines, les êtres vivants, les écosystèmes - humains inclus - etc.) se caractérisent par posséder un grand nombre d’éléments qui interagissent entre eux. On y trouve, aussi, de multiples échelles et des phénomènes de mémoire. Les matériaux viscoélastiques en sont un exemple.

Comme alternative aux modèles avec des dérivées “classiques”, on considère depuis déjà un bon nombre d’années des modèles, dits “fractionnaires”, ayant des dérivées d’ordre non-entier.

2.2 Quelques détails historiques

Le 28 février 1695 ^a, Leibniz écrit une lettre à (Johann) Bernoulli en réponse à un développement en série (de “Taylor”) ^b proposé par Bernoulli pour la primitive d’une fonction. Leibniz, qui était apparemment malade, fait une erreur qui comprends des dérivées d’ordre négatif dans ces développements.

^aS. Dugowson, *Les différentielles métaphysiques: histoire et philosophie de la généralisation de l’ordre de dérivation*, Ph.D. Dissertation, Université Paris Nord, 1994.

^bÀ ce moment Taylor est âgé de moins de dix ans...

Une correspondance s'ensuit où tous deux discutent de différents détails. De L'Hôpital se joint à eux et c'est dans une lettre qu'il reçoit de Leibniz, du 30 septembre 1695, où celui-ci introduit des dérivées d'ordre non-entier^c toujours dans le cadre des développements en série. Leibniz finit par remarquer sur la possible interprétation : “comme toute paradoxe, celle-ci peut fournir des résultats intéressants dans un futur.”

Si bien différents auteurs, tels que Euler en 1730, Lagrange en 1754 ou Fourier en 1822, se sont penchés sur le sujet, il faut attendre qu'Abel, en 1823, l'utilise pour résoudre le problème de l'intégrale tautochrone, pour que quelqu'un propose une formulation générale, ce que fait Liouville en 1832.

À partir de ce moment une formulation pour des intégrales d'ordre non-entier est bâtie avec des contributions (entre autres) de Riemann, Laurent, Hadamard, Heaviside, Sonin, Grünwald, Letnikov, etc., uses preferably the so called fractional integrals, because of their properties. À partir de ces intégrales des dérivées d'ordres non-entiers sont définies.

De nos jours ce sont, dans beaucoup de cas, des applications d'ingénierie qui ont fait croître l'intérêt, suivi de l'analyse mathématique de leurs propriétés. On trouve maintenant plusieurs définitions que l'on applique, par exemple, en hydrodynamique pour décrire des fluides viscoélastiques, ou dans des processus de diffusion anormale, ou de contrôle de modèles avec mémoire, etc.

^cplus exactement, des différentielles d'ordre non-entier

2.3 Fonction Gamma de Euler et fonctions de Mittag-Leffler

La fonction gamma (majuscule) de Euler, Γ (notation, par contre, due à Legendre), peut être considérée comme une généralisation de la factorielle. Elle est définie pour $z \in \mathbb{R}^+$ ^d par :

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty s^{z-1} e^{-s} ds,$$

et satisfait, entre autres les propriétés :

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

d'où l'on déduit

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}.$$

^dEn général $z \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re}(z) > 0$ mais, bon, restons réels.

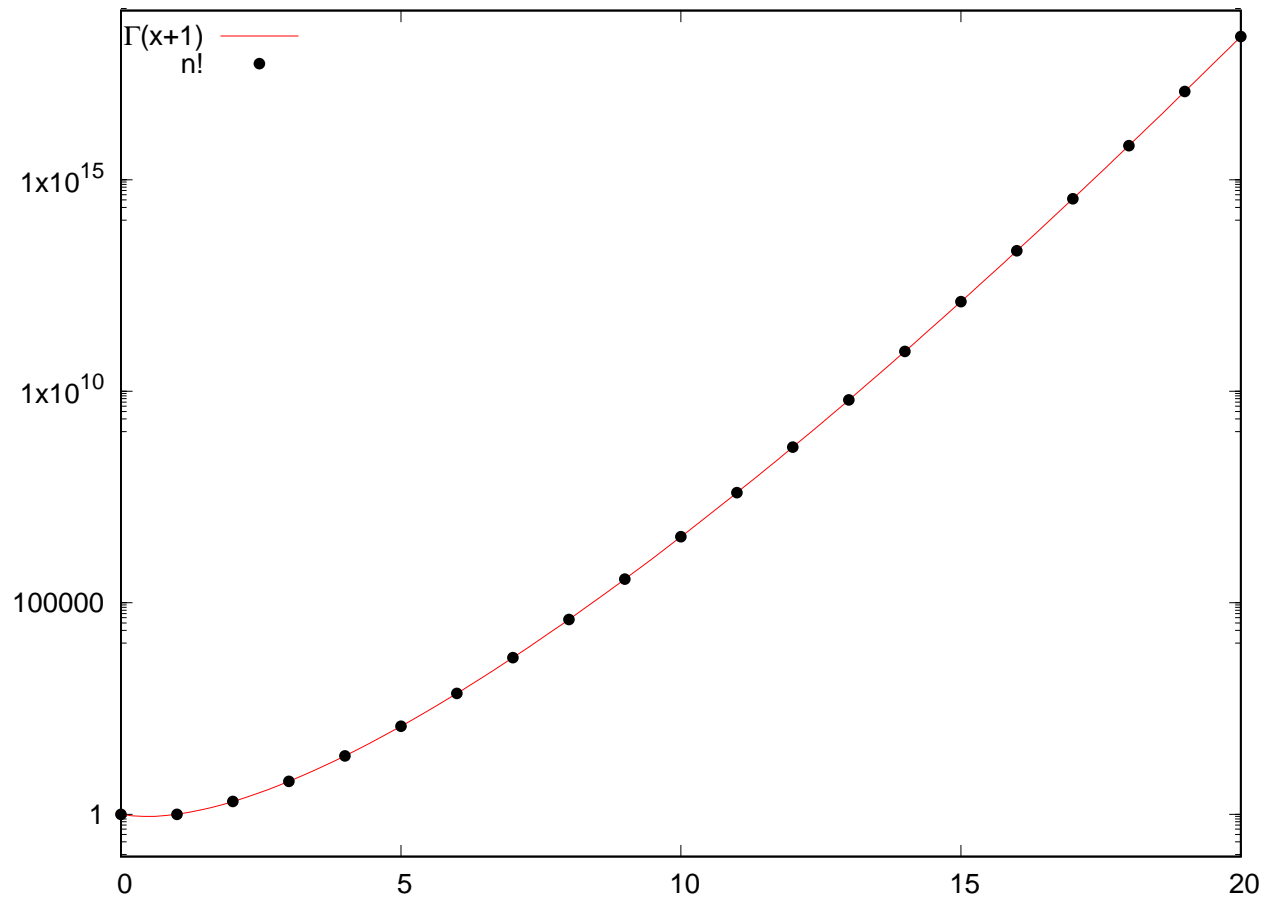


Figure 1: Représentations de la fonction Γ de Euler, pour des valeurs positives, et de la factorielle

De son côté, les fonctions de Mittag-Leffler généralisent la fonction exponentielle. Elles sont définies par :

$$\begin{aligned}
 E_\alpha(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, & (\alpha > 0), & \quad E_1(x) = e^x, \\
 E_{\alpha,\beta}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, & (\alpha, \beta > 0), & \quad E_{\alpha,1} = E_\alpha, \\
 E_{\alpha,\beta}^l(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+l)!}{l! \Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{x^k}{k!}, & (\alpha, \beta > 0; l \in \mathbb{N}), & \quad E_{\alpha,\beta}^0 = E_{\alpha,\beta}.
 \end{aligned}$$

Ces exponentielles généralisées, avec des arguments négatifs, $E_\alpha(-kt)$, $k > 0$, ont un comportement semblable à celui de l'exponentielle pour $0 < \alpha < 1$, mais pour $1 < \alpha < 2$ elles présentent des oscillations amorties.

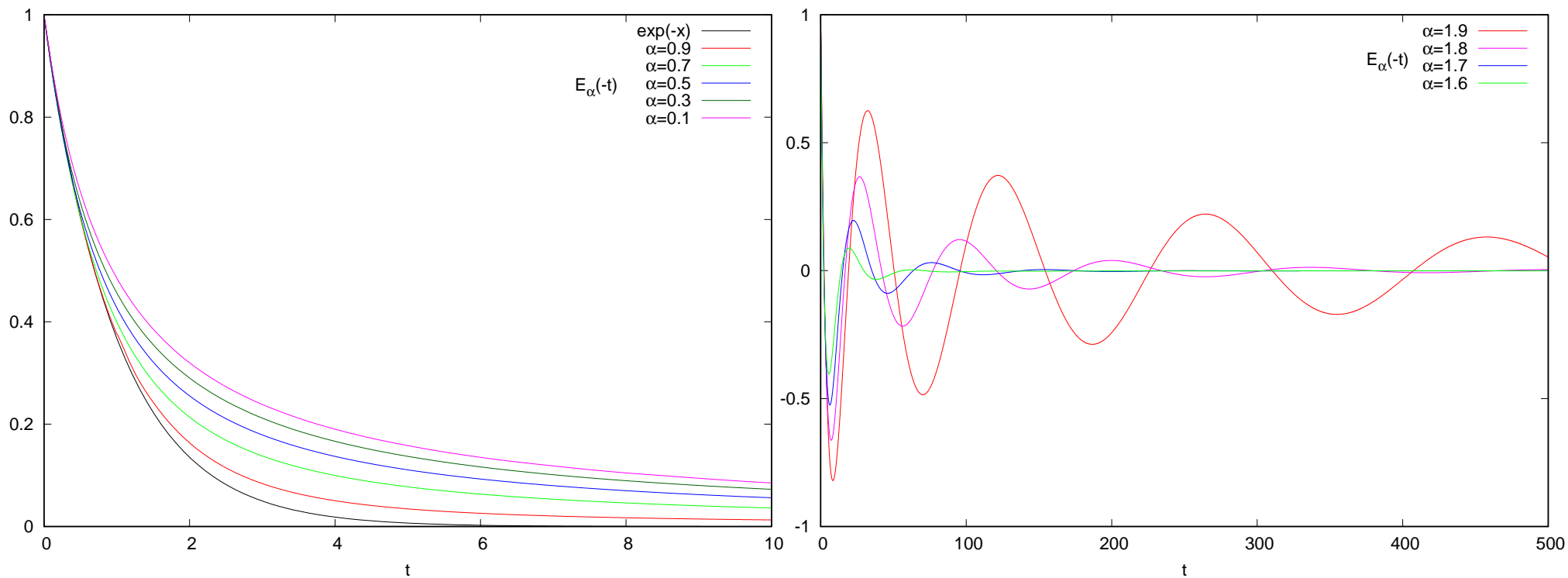


Figure 2: $E_\alpha(-t)$ por quelques valeurs de α , avec $\alpha \in (0, 1)$ ou $\alpha \in (1, 2)$.

2.4 Intégrales fractionnaires

Il est possible d'imaginer une dérivée d'ordre non-entier à partir des transformées de Fourier ou de Laplace :

- Si $\mathcal{F}(f^{(n)})(x) = (2\pi i\kappa)^n \mathcal{F}(f)(\kappa)$, à quoi correspond $\mathcal{F}^{-1}\left((2\pi i\kappa)^\alpha \mathcal{F}(f)(\kappa)\right)$, quand $\alpha \notin \mathbb{N}$?
- Si $\mathcal{L}(f^{(n)})(x) = p^n(\mathcal{L}f)(p) - \sum_{k=1}^n p^{n-k} f^{(k-1)}(0)$, à quoi correspond $\mathcal{L}^{-1}\left(p^\alpha(\mathcal{L}f)(p)\right)$, $\alpha \notin \mathbb{N}$?

Cependant on part d'une autre approche, en généralisant une idée bien différente.

Formule de l'intégrale itérée de Cauchy

De la même façon que l'on peut penser à des dérivées successives pour une fonction :

$$f(x), \quad Df(x) = f'(x), \quad D^2f(x) = f''(x), \dots, \quad D^n f(x) = f^{(n)}(x),$$

on peut envisager itérer l'intégration :

$$\mathcal{I}f(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad \mathcal{I}^2 f(x) = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} f(t) dt, \quad \mathcal{I}^3 f(x) = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \int_a^{x_2} f(t) dt, \dots$$

La formule de Cauchy représente l'iteration d' n intégrations successives avec unique integrale *convolution*^a :

$$I^n f(x) = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} f(t) dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt.$$

Étant donnée la généralisation de la factorielle, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ est définie comme^b :

$$I_{a+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x \in]a, b[.$$

Ce sont des *opérateurs* non locaux ayant les suivantes propriétés :

- Les intégrales son bien définies si $f \in L^1[a, b]$.
- Quand $\alpha \in \mathbb{N}$ on retrouve le cas “classique”.
- Loi des indices (demi-groupe) : soient $f \in L^1[a, b]$ et $\alpha, \beta > 0$, alors, **p.p.** en $]a, b[$,

$$(I_{a+}^\alpha I_{a+}^\beta f)(x) = (I_{a+}^{\alpha+\beta} f)(x).$$

^aJe vous invite à le démontrer (par récurrence sur n).

^bA.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam 2006.

- L'intégrale d'une puissance est une puissance : soient $\beta > 0$ et $\alpha > 0$, alors

$$I_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (x-a)^{\beta+\alpha-1}, \text{ p.p.}$$

2.5 Dérivée de Riemann-Liouville

On la définit comme :

$$(D_{a+}^{\alpha}f)(x) := (D^n I_{a+}^{n-\alpha}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt,$$

avec n tel que $n-1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ (notation: $n = \lceil \alpha \rceil$) et où D représente la dérivée usuelle. Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, on retrouve l'expression usuelle qui correspond. Mais en général la dérivée correspond à un opérateur non local.

Quelques propriétés

- La dérivée est bien définie pour des fonctions $f \in AC^n[a, b] : C^{n-1}[a, b], f^{(n-1)} \in AC[a, b]$.
continue \supset lipschitzienne \supset Absolutely Continuous \supset dérivable.
- Limites aux ordres naturels :

$$\lim_{\alpha \rightarrow n} (D_{a+}^{\alpha}f)(x) = f^{(n)}(x).$$

- Dérivée d'une puissance : soient $\beta > 0$ et $\alpha > 0$, alors

$$D_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha-1}.$$

- Dérivée d'une constante : soit $0 < \alpha < 1$, alors

$$D_{a+}^{\alpha}1 = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

Par ailleurs :

$$D_{a+}^{\alpha}y(x) = 0 \iff y(x) = \sum_{j=1}^n c_j (x-a)^{\alpha-j},$$

avec c_j, d_j des constantes arbitraires.

- Loies des indices : soient $f \in L^1[a, b]$, $\alpha, \beta > 0$, alors p.p.

$$\star (D_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\beta}f)(x) = (D_{a+}^{\alpha+\beta}f)(x) - \sum_{j=1}^m (D_{a+}^{\beta-j}f)(a+) \frac{(x-a)^{-j-\alpha}}{\Gamma(1-j-\alpha)}, \quad [\beta] = m.$$

$$\star (D_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\alpha}f)(x) = f(x),$$

$$\star (I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha}f)(x) = f(x) - \sum_{j=1}^n \frac{f^{(n-j)}(a)}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j}, \quad n = [\alpha].$$

$$\star (D_{a+}^{\beta}I_{a+}^{\alpha}f)(x) = (I_{a+}^{\alpha-\beta}f)(x), \text{ si } \alpha \geq \beta, \quad (D_{a+}^{\beta}I_{a+}^{\alpha}f)(x) = (D_{a+}^{\beta-\alpha}f)(x), \text{ si } \alpha \leq \beta.$$

- Problème de Cauchy avec une dérivée de Riemann-Liouville : la solution de

$$D_{a+}^{\alpha} x(t) = f[t, x(t)], \quad \alpha > 0, \quad t > a,$$

avec

$$D_{a+}^{\alpha-k} x(a^+) = b_k, \quad b_k \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad n = \lceil \alpha \rceil,$$

$$\left(D_{a+}^{\alpha-k} x(a^+) := \lim_{t \rightarrow a^+} D_{a+}^{\alpha-k} x(t) \right)$$

existe et est unique avec les mêmes hypothèses que pour le cas d'ordre entier. Mais...

- les conditions sont *bizarres*,
- quel serait le space des phases ?

2.6 Dérivée de Caputo

Pour avoir un problème de Cauchy avec des conditions ayant des dérivées d'ordres entiers on peut avoir recours à la dérivée de Caputo définie par :

$$({}^c D_{a+}^{\alpha} f)(x) := (I_{a+}^{n-\alpha} D^n f)(x), = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \frac{d^n f(t)}{dt^n} dt,$$

Cela correspond à intervertir la dérivation et l'intégration dans la formule de R-L. La fonction f est maintenant plus régulière puisque sa dérivée n -ième doit exister.

Quelques propriétés

- Relation entre les dérivées de R-L et C :

$$(D_{a+}^{\alpha}f)(x) = ({}^cD_{a+}^{\alpha}f)(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(1+j-\alpha)}(x-a)^{j-\alpha}.$$

- Dérivée d'une constante :

$$({}^cD_{a+}^{\alpha}1) = 0.$$

- Soient $\alpha > 0$, $[\alpha] = n$ et $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, alors

$${}^cD_{a+}^{\alpha}(x-a)^k = 0.$$

- Problème de Cauchy avec une dérivée de Caputo : la solution de

$$D_{a+}^{\alpha}x(t) = f[t, x(t)], \quad \alpha > 0, \quad t > a,$$

avec

$$D_{a+}^k x(a^+) = b_k, \quad b_k \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad n = [\alpha],$$

existe et est unique avec les mêmes hypothèses que pour le cas d'ordre entier.

- Fonctions (vecteurs) propres : soient $\alpha > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$D_{a+}^{\alpha}E_{\alpha}(\lambda(t-a)^{\alpha}) = \lambda E_{\alpha}(\lambda(t-a)^{\alpha}).$$

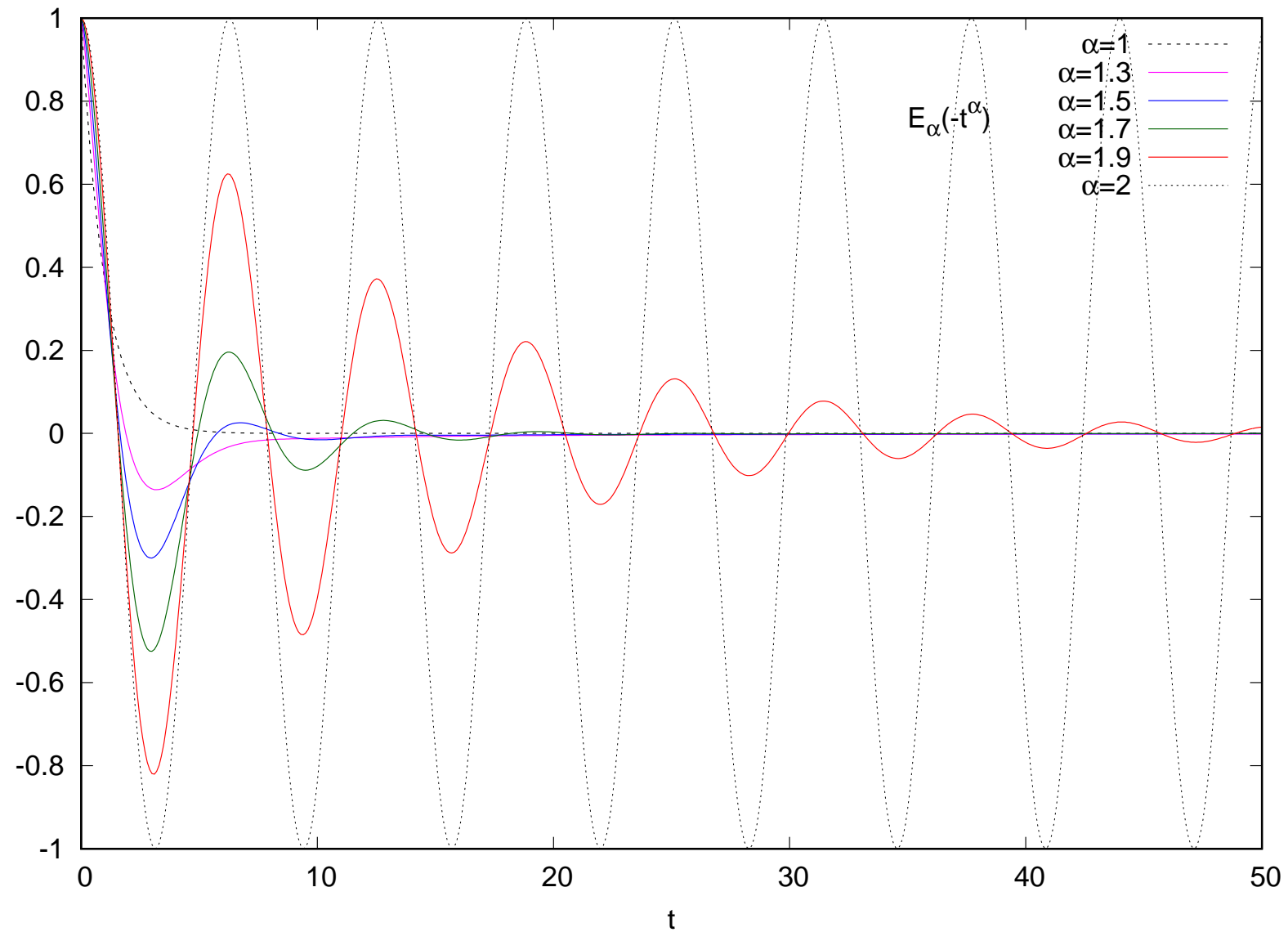


Figure 3: Fonctions propres de la dérivée de Caputo, $\lambda = -1$, $E_\alpha(-t^\alpha)$.

2.7 Dérivée de Grünwald-Letnikov

C'est une approche bien différente :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(f(x) - f(x-h) \right),$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(x-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x) - f(x-h)}{h} - \frac{f(x-h) - f(x-2h)}{h}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \left(f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h) \right), \end{aligned}$$

$$f^{(3)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} \left(f(x) - 3f(x-h) + 3f(x-2h) - f(x-3h) \right),$$

$$f^{(4)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^4} \left(f(x) - 4f(x-h) + 6f(x-2h) - 4f(x-3h) + f(x-4h) \right),$$

etc.

Quels sont ces coefficients ?

La formule générale est bien :

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{\ell=0}^n (-1)^\ell \binom{n}{\ell} f(x - \ell h), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Extension fractionnaire : étant donné que

$$\binom{n}{\ell} = \frac{n!}{\ell!(n-\ell)!}$$

on choisi :

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{\ell=0}^n (-1)^\ell \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\ell! \Gamma(\alpha+1-\ell)} f(x - \ell h), \quad \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

Le problème : n , la valeur supérieure de la somme, n'as plus aucun sens. Si on considère $x \in [a, b]$ (et b pourrait même être $+\infty$), on peut écrire

$$h = \frac{x-a}{n} \implies n = \frac{x-a}{h}, \quad h > 0,$$

et on substitue n par la partie entière de cette valeur. On défini, finalement :

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{\ell=0}^{\left[\frac{x-a}{h} \right]} (-1)^\ell \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\ell! \Gamma(\alpha+1-\ell)} f(x - \ell h), \quad \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

Dans la pratique, la limite en h est tronquée et une petite valeur de h (suffisamment petite) est choisie pour obtenir une approximation.

3 FODE models

There have been bottom-up generated models, arising from actual applications. For instance in control or in the study of visco-elastic media [3]. There have also been top-down generated models, trying to see what consequences can be obtained “fractionalizing” a given integer-order ODE, with different success.

3.1 Some tools

The fractional derivatives are linear operators. This allows to preserve some interesting features of the integer-order case (especially true in the case of the Caputo Derivative).

- “Fractional Picard Theorem”: existence and unicity of the solution for the ivp

$$\text{ODE: } \frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad \text{FODE: } {}^C_{RL}D^\alpha x = f(t, x), \quad \text{if } f \text{ is continuous in } t \text{ and Lipschitz in } x. \quad (1)$$

- For linear equations the superposition principle holds: linear combinations of solutions are solutions.
- Laplace and Fourier Transform can be applied.

- Linear, homogeneous, equations with constant coefficients have as space of solutions a vector space spanned by the eigenfunctions of the differential operator:

$$\text{ODE: } \frac{d\vec{x}}{dt} = M\vec{x}, \quad \text{FODE: } {}^C D^\alpha \vec{x} = M\vec{x}, \quad \vec{x}(t) = \sum_k c_k f_k(t) \vec{v}_k. \quad (2)$$

- Similarly if we add a constant: the solution is the general solution of the homogeneous equations plus a particular solution of the inhomogeneous system:

$$\text{ODE: } \frac{d\vec{x}}{dt} = M\vec{x} + \vec{c}, \quad \text{FODE: } {}^C D^\alpha \vec{x} = M\vec{x} + \vec{c}, \quad \vec{x}(t) = \vec{f}_p(t) + \sum_k c_k f_k(t) \vec{v}_k. \quad (3)$$

- Linear stability analysis of hyperbolic critical points is valid (first Lyapunov method [4]):
 $\arg \in [-\pi, \pi)$

$$\text{ODE: } \forall k, \operatorname{Re}(\lambda_k) < 0 \iff \forall k, |\arg(\lambda_k)| > \pi/2 \quad (4)$$

$$\text{FODE: } \forall k, |\arg(\lambda_k)| > \alpha\pi/2, \quad \alpha \in (0, 1) \quad (5)$$

- Nonlinear stability analysis by the second Lyapunov method exists (Lyapunov function[5]):

$$\text{ODE: Strong stability,} \quad \text{FODE: "Mittag-Leffler" stability (implies strong stability).}$$

- Critical points correspond to constant solutions (Caputo):

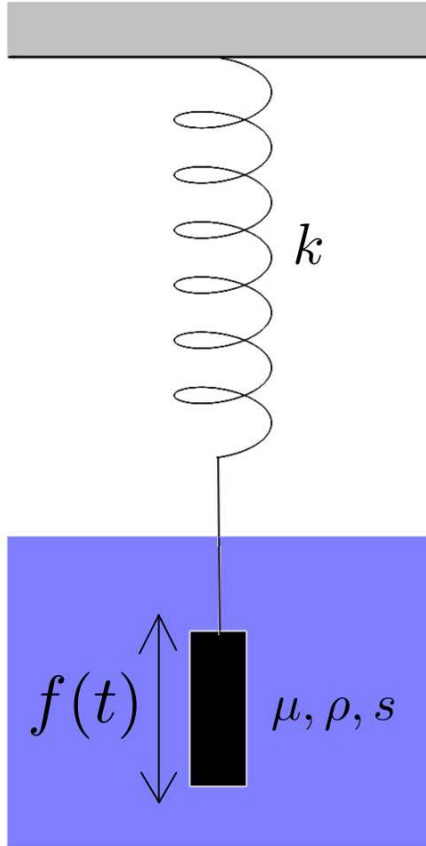
$$\text{ODE: } \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}), \quad \text{FODE: } {}^C D^\alpha \vec{x} = \vec{f}(\vec{x}), \quad \vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}. \quad (6)$$

3.2 Drawbaks

Some properties, many of which are everyday tools, do not transfer to the fractional models.

- The Leibniz rule is not valid.
- The chain rule is not valid.
- The eigenfunctions of fractional derivatives are not orthogonal (thus, no Fourier Series).
- Higher order equations do not correspond necessarily to a system of unique order.
- What is now the phase space?

3.3 An example: a visco-elastic linear model



We consider a thin plate of surface s moving vertically in a fluid of density ρ , with viscosity μ , attached to a spring with constant k , subject to an external force $f(t)$. The behaviour of the displacement $x(t)$ is modeled by the fractionally damped equation:

$$\ddot{x} + a {}^c D^\alpha x + kx = f(t) \quad (7)$$

with a some constant that depends on μ , ρ and s .

This linear system can be (formally) solved by the Laplace transform, depending on the initial conditions $x(0)$, $\dot{x}(0)$.

Let be $\mathcal{L}(x(t)) = Y(p)$, $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$:

$$Y(p) = \frac{F(p) + (p + ap^{\alpha-1})x(0) + (1 + ap^{\alpha-2})\dot{x}(0)}{p^2 + ap^\alpha + k}.$$

In the cases where $2/\alpha$ is rational, with zero initial conditions, it can be formulated, by *congruent decomposition* as a spectral problem for some basic operator ${}^c D^{p/q}$.

Application: $\alpha = 3/2$, $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

Since we have zero initial conditions we have:

$${}^cD^{1/2}({}^cD^{1/2}x) = {}^cD^{2/2}x, \quad \text{etc.}$$

We define auxiliary variables x_k such that $x_0 = x$ and express the equation as

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^cD^{1/2}x_0(t) = x_1(t), \\ {}^cD^{1/2}x_1(t) = x_2(t), \\ {}^cD^{1/2}x_2(t) = x_3(t), \\ {}^cD^{1/2}x_3(t) = -kx_0(t) - ax_3(t) + f(t), \\ x_k(0) = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3. \end{array} \right. \iff {}^cD^{1/2}\vec{x} = M\vec{x} + \vec{v}(t).$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k & 0 & 0 & -a \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

We then diagonalize M , uncouple the equations representing \vec{x} in a basis of eigenvectors (complex), solve and, finally, transform back to obtain $x(t) = x_0(t)$.

Or we can solve numerically: (the periodic limit cycle is **not** a solution)

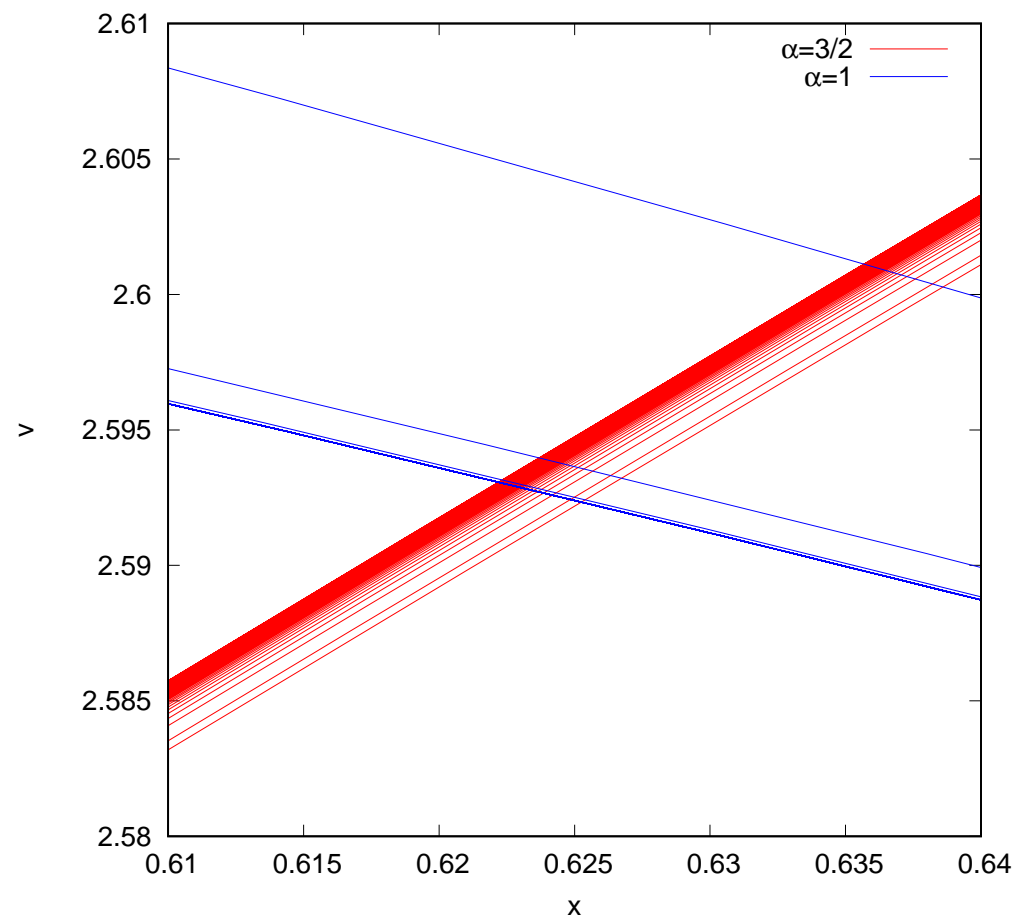
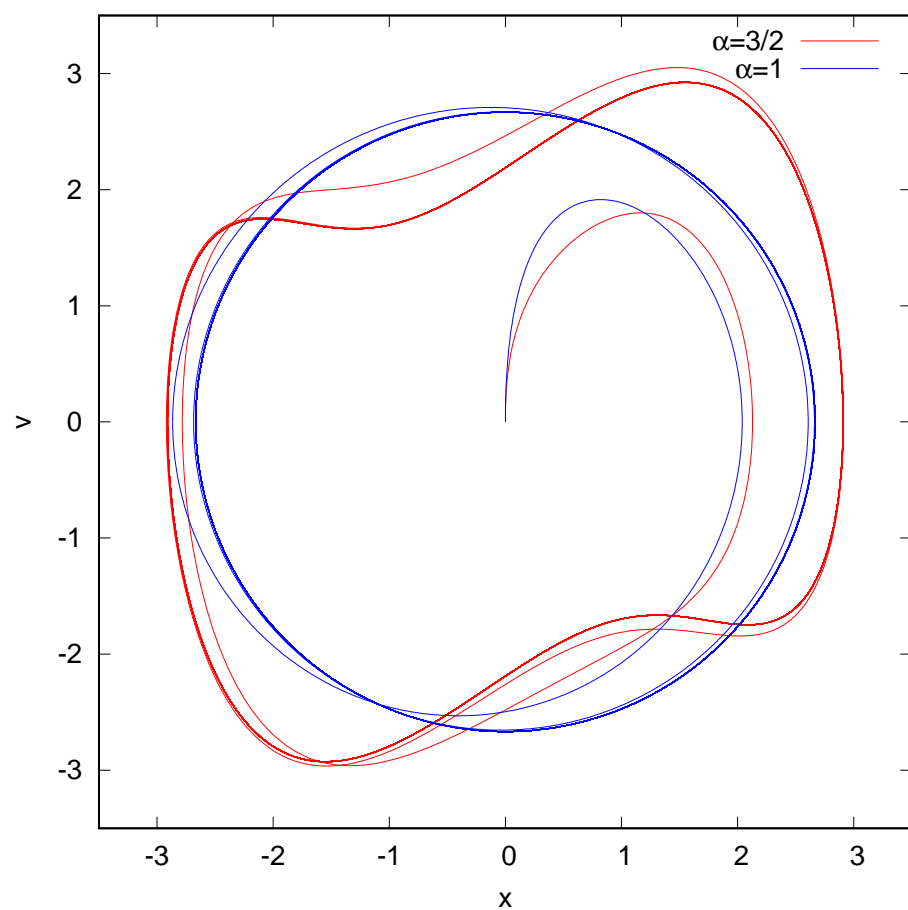


Figure 4: $a = 3$, $k = 1$, $f(t) = 8 \cos(t)$

Second example: Bagley-Torvik Equation

It corresponds to the i.v.p. with Caputo fractional derivative of order $3/2$ given by:

$$\begin{cases} D^2 x(t) + 2D^{3/2}x(t) - 3x(t) = \sin(t), \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$$

we can solve it, as the previous example, by congruent decomposition. The linear system is, in this case:

$$D^{1/2}\vec{x}(t) = M\vec{x} + \vec{c},$$
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

The eigenvalues of M are:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1 - \sqrt[3]{2}, \quad \lambda_{3,4} = -1 + \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \pm i\sqrt{3}\frac{\sqrt[3]{2}}{2}.$$

In the “classical” case ($\alpha = 1$) the solution is unbounded:

$$x(t) = \frac{1}{8}e^t - \frac{1}{40}e^{-3t} - \frac{1}{10}\cos(t) - \frac{1}{5}\sin(t).$$

But for $\alpha = 3/2$ we obtain a periodic curve as the limit.

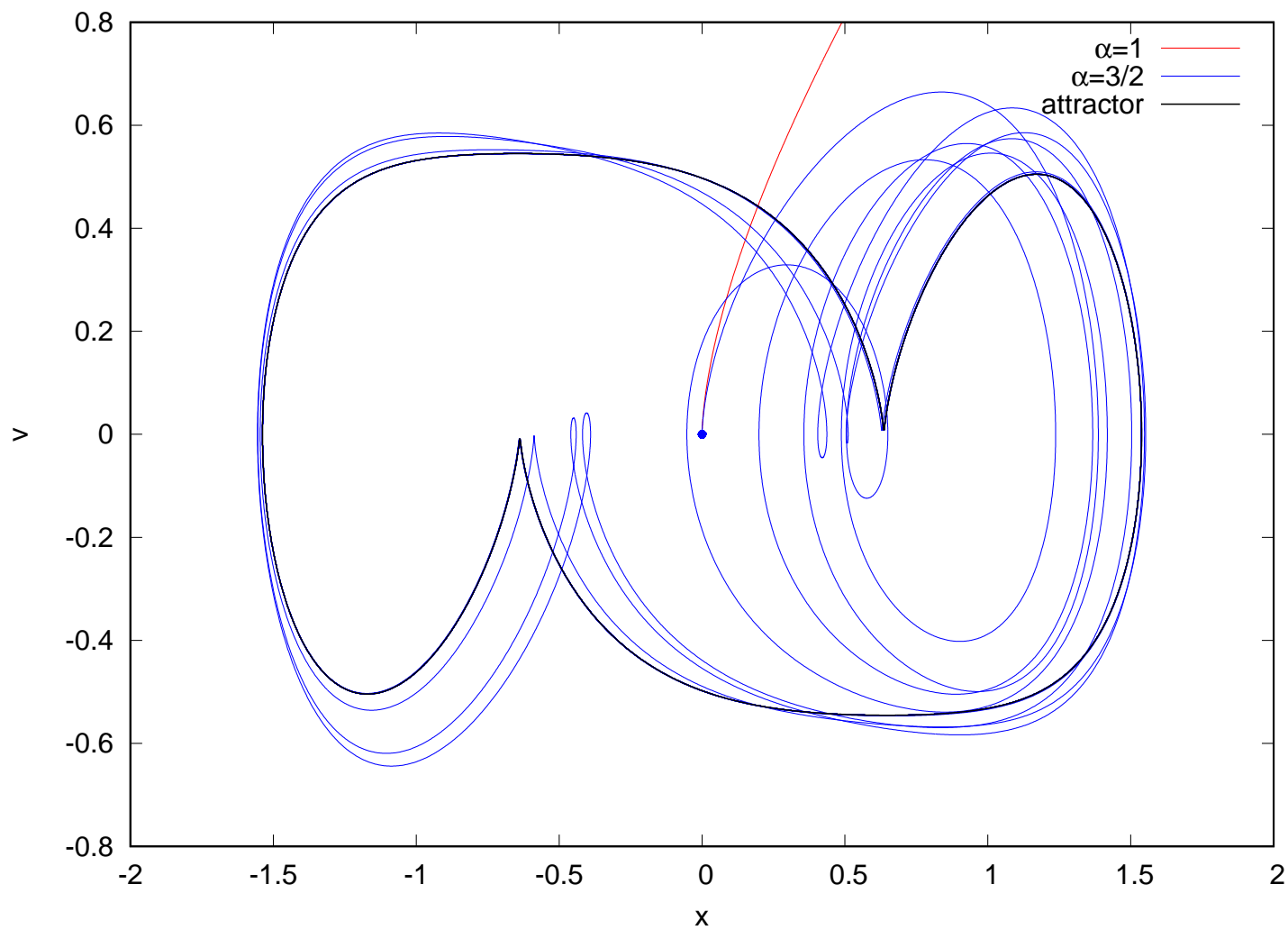


Figure 5: solution of the Bagley-Torvik Problem for $\alpha = 1$ and for $\alpha = 3/2$.

3.4 An example: a visco-elastic nonlinear model

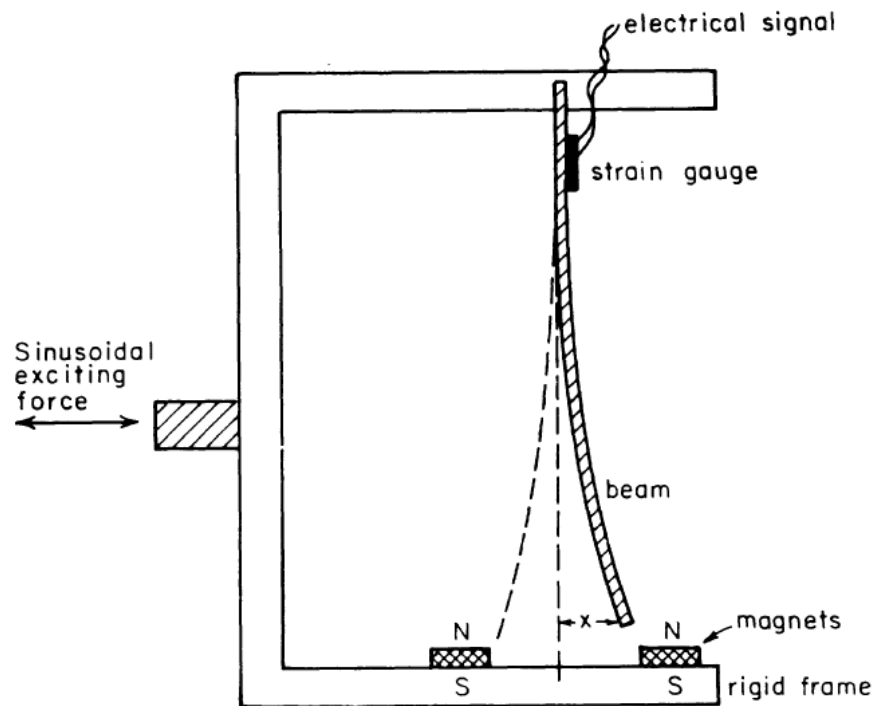


Figure 2.2.1. The magneto-elastic beam.

The equation

$$\ddot{x} + \gamma^c D^\alpha x - x + x^3 = f_0 \cos(\omega t) \quad (8)$$

is a “visco-elastic-damped” counterpart of the Duffing equation:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} - x + x^3 = f_0 \cos(\omega t). \quad (9)$$

It corresponds to the same device but immersed in a visco-elastic fluid. With a Cauchy problem $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$, it has a unique solution starting at time $t_0 = 0$.

Figure 6: Guckenheimer & Holmes [6], experimental setup of the Duffing equation.

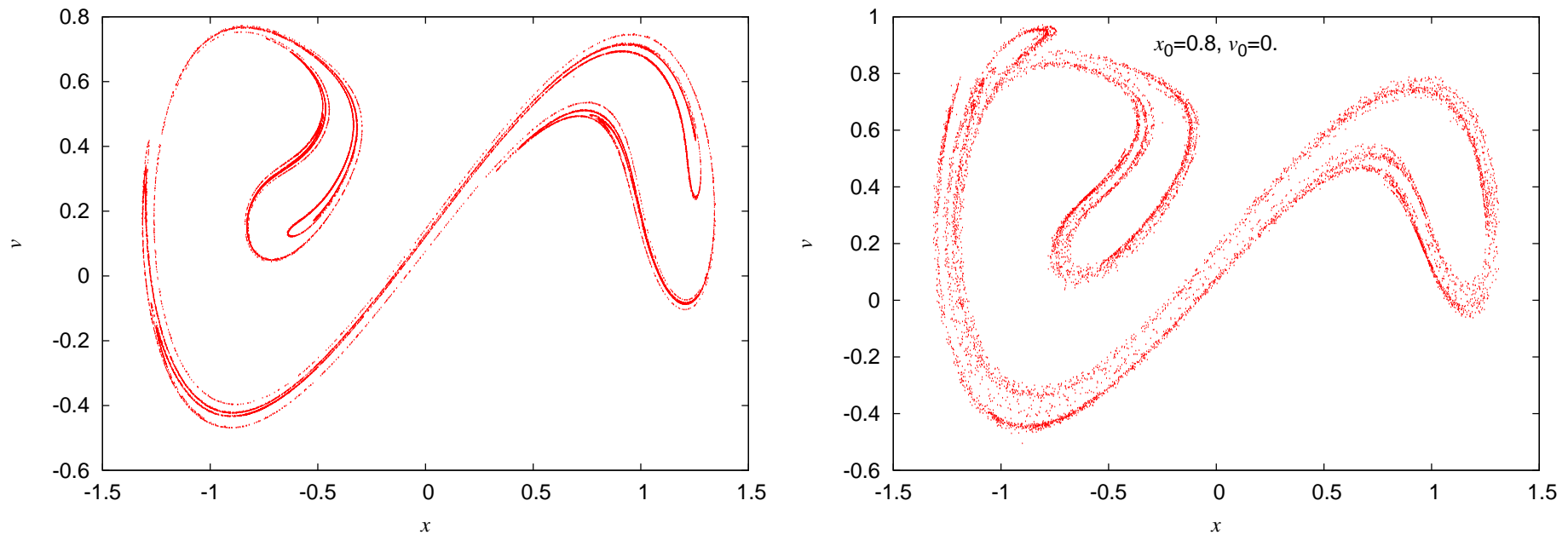


Figure 7: The strange attractor of the integer-order (left) and of the fractional-order Duffing equation (right).

Property

Let us consider, for instance, the following initial value problem:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \gamma \left({}^c D_{t_1^+}^\alpha x \right)_t(t) - F(x) = f_0 \cos(\omega t), \\ x(t_1) = a, \quad \dot{x}(t_1) = b. \end{cases} \quad (10)$$

We use:

$$\begin{aligned}
\left({}^c D_{t_1^+}^\alpha x\right)_t(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_1}^t \frac{\frac{\partial^n}{\partial \tau^n} x(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^s \frac{\frac{\partial^n}{\partial \sigma^n} x(t_1 + \sigma)}{(s-\sigma)^{\alpha+1-n}} d\sigma \quad [t = t_1 + s, \quad \tau = \sigma + t_1] \\
&= ({}^c D_{0^+}^\alpha x)_s(t_1 + s) = ({}^c D_{0^+}^\alpha y)_s(s), \quad [y(s) = x(t_1 + s)]
\end{aligned} \tag{11}$$

and we rewrite (10) as

$$\begin{cases} y'' + \gamma ({}^c D_{0^+}^\alpha y)_s(s) - F(y) = f_0 \cos(\omega s + \phi_0), & \phi_0 = \omega t_1, \\ y(0) = a, \quad y'(0) = b. \end{cases} \tag{12}$$

where the prime stands for derivation with respect to s . We obtain the same system as (10) but at $t = 0$ and with an initial time-phase. If, for instance, $t_1 = 2\pi/\omega$, $a = x_0$ and $b = v_0$, (12) becomes (8).

Conclusions

- All solutions can be reached from $t_0 = 0$ We may consider that any solution that starts at a later time is, in fact, a solution that started at $t_0 = 0$ but with a phase.
- We still don't know... We still don't know how to prolong a given solution from the “state” it is at a given time.
- But... Our Cauchy problem, for any solution, can be stated at time $t_0 = 0$ with three values: x_0 , v_0 and ϕ_0 .
- 3-dim space We conclude that our phase space has three dimensions: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, 2\pi)$.
- 2-dim in practice for many purposes Just as for a nonautonomous “classical” system. Since the initial phase is a constant, it is not relevant for many aspects when analysing the solutions.
- So... What is the phase space, in practice, for a fractional system? The space of initial conditions or the space of conditions to prolong a solutions?

See for instance [7, 8].

Some references

- [1] S. Dugowson, *Les différentielles métaphysiques: histoire et philosophie de la généralisation de l'ordre de dérivation*, Ph.D. Dissertation, Université Paris Nord, 1994.
- [2] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam 2006.
- [3] R.L. Bagley, P.J. Torvik, “On the fractional calculus model of viscoelastic behavior”, *Journal of Rheology*, **30**(1), (1986), 133–155. And references therein.
- [4] D. Matignon, “Stability results for fractional differential equations with applications to control processing”, *Computational Engineering in Systems Applications*, **2** (1996) 963-968.
- [5] Delavari, H., Baleanu, D. & Sadati, J., “Stability analysis of Caputo fractional-order nonlinear systems revisited”, *Nonlinear Dyn* **67**, 2433-2439 (2012).
- [6] J. Guckenheimer and Ph. Holmes, *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [7] Hamaizia, S., Jiménez, S. & Velasco, M.P., “Rich phenomenology of the solutions in a fractional Duffing equation”, *Fract Calc Appl Anal* **27**, 1017-1047 (2024).
- [8] Hamaizia, Sara (2024). *Chaos and Dynamics in a Fractional Duffing Equation*, PhD. Thesis Dissertation, E.T.S.I. Telecomunicación (Universidad Politécnica de Madrid).
<https://doi.org/10.20868/UPM.thesis.84420>.

Merci de votre attention !